Matematica II, 15.11.11, e 16.11.11 (I parte)

1. Un esempio di una equazione lineare in una incognita e' $2x = 3$; questa equazione ha una ed una sola soluzione: $x = \frac{3}{2}$. Le equazioni lineari nell'incognita x sono le equazioni della forma

   $$ax = b,$$

   dove a e b, detti rispettivamente coefficiente e termine noto dell'equazione, sono costanti reali. Una soluzione dell'equazione e' un numero reale r che sostituito all?incognita x renda vera l'uguaglianza, cioe' tale che

   $$ar = b.$$

   L'equazione si dice determinata, indeterminata, impossibile secondoche abbia rispettivamente esattamente una, infinite, o nessuna soluzione. Per $a \neq 0$ l'equazione e' determinata ed ha l'unica soluzione

   $$x = \frac{b}{a};$$

   per $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione e' impossibile, e per $a = b = 0$ l'equazione e' indeterminata, ogni numero reale e' soluzione.

2. Un esempio di equazione lineare in due incognite e' $x - y = -2$; da questa equazione possiamo ricavare y in funzione di x, ottenendo $y = x + 2$, e le soluzioni dell'equazione sono del tipo: $y = x + 2$, $x = qualsiasi$; l'equazione e' indeterminata.

   Le equazioni lineari nelle incognite x, y sono le equazioni della forma

   $$ax + by = c,$$

   dove a e b, i coefficienti, e c, il termine noto, sono costanti reali. Una soluzione dell'equazione e' una coppia di numeri reali (r, s) che sostituiti ordinatamente alle incognite x, y rendono vera l'uguaglianza, cioe' tali che

   $$ar + bs = c.$$

   L'equazione si dice determinata, indeterminata, impossibile secondoche abbia rispettivamente esattamente una, infinite, o nessuna soluzione.

Se almeno uno fra a e b e' $\neq 0$, l'equazione e' indeterminata con una incognita libera, e l'insieme delle soluzioni e' una retta nel piano; se $a = b = 0$ e $c \neq 0$ l'equazione e' impossibile; se $a = b = c$ l'equazione e' indeterminata, con incognite libere, e l'insieme delle soluzioni e' l'intero piano.

Un esempio di sistema lineare di due equazioni nelle incognite x e y e'

$$\begin{cases} x - y &= -1 \\ 2x + y &= 2 \end{cases}.$$

Questo sistema puo' essere risolto col metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x &= y - 1 \\ 2(y-1) + y &= 2 \end{cases}$$

$$3y = 4, \qquad y = \frac{4}{3}; \qquad x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3};$$

$$(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}).$$

Il sistema e' determinato. Alle due equazioni del sistema corrispondono due rette incidenti.

Un esempio di sistema impossibile e'

$$\begin{cases} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 3 \end{cases};$$

alle due equazioni del sistema corrispondono due rette parallele.

Un esempio di sistema indeterminato e'

$$\begin{cases} 2x + 4y &= 6 \\ 3x + 6y &= 9 \end{cases}$$

alle due equazioni del sistema corrisponde un'unica retta.

3. Un altro metodo per la risoluzione dei sistemi e' il metodo di eliminazione, che illustriamo di seguito con un esempio.

$$\begin{cases} 4x + 5y &= 6 \\ 7x + 8y &= 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y & = & 6 \\ 7x + 8y - \frac{7}{4}(4x + 5y) & = & 9 - \frac{7}{4}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y & = & 6 \\ -\frac{3}{4}y & = & -\frac{6}{4} \end{cases}$$

$$y = 2; \qquad 4x + 10 = 6, \quad x = -1$$

$$(x, y) = (-1, 2).$$

4. Descriviamo il metodo di eliminazione per la risoluzione di un arbitrario sistema lineare di due equazioni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & = & c_1 \\ a_2x + b_2y & = & c_2 \end{cases}$$

nelle due incognite x, y.

Il passo fondamentale consiste nel sommare alla seconda equazione un multiplo della prima

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & = & c_1 \\ a_2x + b_2y + \lambda(a_1x + b_1y) & = & c_2 + \lambda c_1 \end{cases};$$

questa operazione lascia invariato l'insieme delle soluzioni del sistema. Mettendo in evidenza i coefficienti delle incognite si ha

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & = & c_1 \\ (a_2 + \lambda a_1)x + (b_2 + \lambda b_1)y & = & c_2 + \lambda c_1 \end{cases}.$$

Sotto la condizione $a_1 \neq 0$, c'e' uno ed un solo valore di λ che rende nullo il coefficiente della x nella seconda equazione:

$$a_2 + \lambda a_1 = 0; \qquad \lambda = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Per tale valore di λ il sistema diventa del tipo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & = & c_1 \\ b_1'y & = & c_2' \end{cases}.$$

Sotto la condizione $b_2' \neq 0$, dalla seconda equazione ricaviamo in modo univoco il valore della y; sostituiamo nella prima equazione alla y questo valore e ricaviamo in modo univoco il valore della x.

Sotto le condizioni $a_1 \neq 0$ e $b_2' \neq 0$ abbiamo cosi' che il metodo funziona e il sistema e' determinato.

Un'analisi un po' piu' approfondita mostra che il metodo di eliminazione funziona e il sistema e' determinato se e solo se

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

5. I dati che caratterizzano un arbitrario sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x, y possono essere rappresentati con una matrice

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right].$$

L'operazione di sommare alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per il numero λ porge il sistema e la matrice

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ (a_2 + \lambda a_1)x + (b_2 + \lambda b_1)y &= c_2 + \lambda c_1 \end{cases}.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \end{array}\right]$$

Dunque all'operazione sul sistema che consiste nel sommare alla seconda equazione la prima moltiplicata per λ corrisponde l'operazione sulla matrice che consiste nel sommare a ciascun elemento seconda riga l'omologo elemento della prima riga moltiplicato per λ. Descriviamo in breve quest'ultima operazione come "sommare ala seconda riga la prima riga moltiplicata per λ."

6. Un esempio di equazione lineare in tre incognite e' $x - y + 2z = 3$; da questa equazione possiamo ricavare x in funzione di y, z, ottenendo $x = y - 2z + 3$, e le soluzioni dell'equazione sono del tipo: $x = y - 2z +$

3, $y =$ *qualsiasi*, $z =$ *qualsiasi*; l'equazione e' indeterminata, e ci sono due incognite libere.

Le equazioni lineari nelle incognite x, y, z sono le equazioni della forma

$$ax + by + cz = d,$$

dove a, b e c, i coefficienti, e d, il termine noto, sono costanti reali.

Se almeno uno fra a, b e c e' $\neq 0$, l'equazione e' indeterminata con due incognite libere, e l'insieme delle soluzioni e' un piano nello spazio; se $a = b = c = 0$ e $d \neq 0$ l'equazione e' impossibile; se $a = b = c = d$ l'equazione e' indeterminata, con incognite libere, e l'insieme delle soluzioni e' l'intero spazio.

7. Di seguito riportiamo la risoluzione di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite tramite il metodo di eliminazione; a ciascun sistema affianchiamo la corrispondente matrice.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y - 3z & = & 1 \\ 4x - 5y - 6z & = & 7 \\ 7x - 8y - 10z & = & 11 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & -6 & 7 \\ 7 & -8 & -10 & 11 \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y - 3z & = & 1 \\ 3y + 6z & = & 3 \\ 6y + 11z & = & 4 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & 4 \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y - 3z & = & 1 \\ 3y + \ 6z & = & 3 \\ -z & = & -2 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -\ 1 & -2 \end{array} \right]$$

Osserviamo che a ciascuna operazione sui sistemi, che consiste nel sommare ad una equazione un multiplo di un'altra equazione, corrisponde un'operazione sulle matrici, che consiste nel sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga; al sistema finale corrisponde una matrice "triangolare".

Il sistema finale ha le stesse soluzioni del sistema iniziale, ed e' di facile risoluzione. Dalla terza equazione ricaviamo il valore della z; nella seconda equazione sostituiamo alla z il suo valore e ricaviamo il valore della y; nella prima equazione sostituiamo alla z e alla y i loro valori e ricaviamo il valore della x :

$$z = 2; \qquad 3y + 12 = 3, \quad y = -3; \qquad x + 6 - 6 = 1, \quad x = 1$$

$$(x, y, z) = (1, -3, 2)$$

8. Le osservazioni svolte al punto precedente suggeriscono che il metodo di eliminazione si possa applicare passando dal sistema alla corrispondente matrice, applicando a questa matrice operazioni sulle righe al fine di trasformarla in una matrice triangolare, passando infine da questa matrice al corrispondente sistema, che ha le stesse soluzioni del sistema iniziale, ed e' di facile soluzione:

$$\begin{array}{lcl} sist. & \rightarrow & matr. \\ & & \downarrow \\ sist.\ tr. & \leftarrow & matr.\ tr. \end{array}$$

Descriviamo questo processo su un esempio.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y + z & = & 4 \\ 2x + 2y + z & = & 5 \\ x + y + z & = & 6 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} P \\ Q - \frac{2}{3}P \\ R - \frac{1}{3}P \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} P \\ Q \\ R - \frac{1}{2}Q \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z &= 4 \\ \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2}z &= \frac{7}{2} \end{cases}$$

Il sistema e' determinato.

9. Descriviamo il metodo di eliminazione per la risoluzione di un arbitrario sistema lineare di tre equazioni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{cases}$$

in tre incognite x, y, z.

Consideriamo la matrice che corrisponde al sistema.

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ R \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right].$$

Se almeno uno fra a_1, a_2, a_3 e' $\neq 0$, effettuando eventualmente uno scambio di righe possiamo fare in modo che $a_1 \neq 0$, e sommando alla seconda e terza riga opportuni multipli della prima riga possiamo annullare gli elementi sotto a_1; otteniamo cosi' una matrice del tipo

$$\begin{array}{l} P \\ Q - \frac{a_2}{a_1}P \\ R - \frac{a_3}{a_1}P \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2' & c_2' & d_2' \\ 0 & b_3' & c_3' & d_3' \end{array}\right]$$

Se almeno uno fra b_2', b_3' e' $\neq 0$, effettuando eventualmente uno scambio di righe possiamo fare in modo che $b_2' \neq 0$, e sommando alla terza riga unopportuno multiplo della seconda riga possiamo annullare l'elemento sotto b_2'; otteniamo cosi' una matrice del tipo

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ R - \frac{b_3'}{b_2'}Q \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2' & c_2' & d_2' \\ 0 & 0 & c_3'' & d_3'' \end{array}\right]$$

Consideriamo il sistema corrispondente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ b_2'y + c_2'z & = & d_2' \\ c_3''z & = & d_3'' \end{array} \right. .$$

Questo sistema ha le stesse soluzioni del sistema iniziale. Se $c_3'' \neq 0$, il sistema e' determinato.

Sotto le condizioni $a_1 \neq 0$, $b_2' \neq 0$ e $c_3'' \neq 0$, abbiamo cosi' che il metodo funziona e il sistema e' determinato.

Un'analisi decisamente piu' approfondita mostra che il metodo di eliminazione funziona e il sistema e' determinato se e solo se

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \neq 0.$$

10. A ciascuna equazione lineare

$$ax = b$$

nell'incognita x possiamo associare il punto (a, b) nel piano. Sappiamo che un'equazione e' determinata se e solo se $a \neq 0$, cosi' all'insieme delle equazioni determinate corrisponde l'intero piano, privato della retta $a = 0$.

Ora, cosi' come l'insieme dei punti di una retta si puo' ritenere trascurabile rispetto all'insieme dei punti dell'intero piano, l'insieme delle equazioni non determinate si puo' ritenere trascurabile rispetto all'insieme delle equazioni. In breve, si puo' dire che "genericamente" un'equazione lineare in una incognita e' determinata.

In modo analogo si ha che "genericamente" per un sistema lineare di due equazioni in due incognite il metodo di eliminazione funziona e il sistema e determinato. Lo stesso vale per un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite.

11. Un esempio di sistema lineare impossibile e'

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 4x + 5y + 6z & = & 1 \\ 7x + 8y + 9z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Un esempio di sistema lineare indeterminato e'

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 1 \\ 7x + 8y + 9z &= 1 \end{cases}.$$

Questo sistema ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 1 \end{cases},$$

che puo' essere risolto come segue. Eliminiamo la x dalla seconda equazione, sommando alla seconda equazione -4 volte la prima; otteniamo cosi'

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ -3y - 6z &= -3 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione ricaviamo la y in funzione della z, nella prima equazione sostituiamo alla y la sua espressione e ricaviamo la x in funzione della z :

$$y = -2z + 1; \qquad x + 2(-2z + 1) + 3z = 1, \quad x = z - 1$$

L'incognita z e' libera, e il sistema ha infinite soluzioni del tipo

$$\begin{cases} x &= z - 1 \\ y &= -2z + 1 \\ z &= qualsisasi \end{cases}.$$

L'insieme delle soluzioni del sistema e' una retta nello spazio.